专题 20　概率、随机变量与分布列

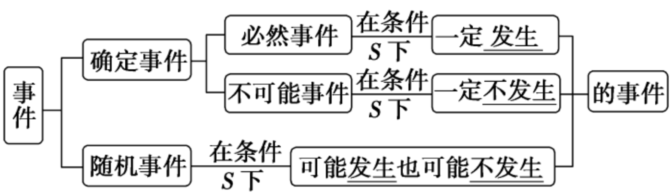
（思维构建+知识盘点+重点突破+方法技巧+易混易错）

思维构建·理清脉络

知识盘点·查漏补缺

知识点 1　随机事件的概率与古典概型

1、事件的相关概念



2、频率与概率的关系

（1）频率：在 n 次重复试验中，事件 A 发生的次数 k 称为事件 A 发生的频数，频数 k 与总次数 n 的比值 $\frac{k}{n}$，叫做事件 A 发生的频率.

（2）概率：在大量重复尽心同一试验时，事件 A 发生的频率 $\frac{k}{n}$ 总是接近于某个常数，并且在它附近摆动，这时，就把这个常数叫做事件 A 的概率，记作 $P(A)$.

（3）概率与频率的关系：对于给定的随机事件A，由于事件A发生的频率$\frac{k}{n}$随着试验次数的增加稳定于概率$P(A)$，因此可以用频率$\frac{k}{n}$来估计概率$P(A)$．

3、事件的关系与运算

（1）包含关系：一般地，对于事件A和事件B，如果事件A发生，则事件B一定发生，这时称事件B包含事件A（或者称事件A包含于事件B），记作$B\supseteq A$或者$A\subseteq B$．

（2）相等关系：一般地，若$B\supseteq A$且$A\supseteq B$，称事件A与事件B相等．

（3）并事件（和事件）：若某事件发生当且仅当事件A发生或事件B发生，则称此事件为事件A与事件B的并事件（或和事件），记作$A\bigcup B$（或$A+B$）．

（4）交事件（积事件）：若某事件发生当且仅当事件A发生且事件B发生，则称此事件为事件A与事件B的交事件（或积事件），记作$A\bigcap B$（或AB）．

（5）互斥事件：在一次试验中，事件A和事件B不能同时发生，即$A\bigcap B=\varnothing$，则称事件A与事件B互斥；

如果A_1，A_2，…，A_n中任何两个都不可能同时发生，那么就说事件A_1，．A_2．，…，A_n彼此互斥．

（6）对立事件：若事件A和事件B在任何一次实验中有且只有一个发生，即$A\bigcup B=\Omega$不发生，$A\bigcap B=\varnothing$则称事件A和事件B互为对立事件，事件A的对立事件记为$\overline{A}$．

4、概率的基本性质

（1）对于任意事件A都有：$0\le P(A)\le 1$．

（2）必然事件的概率为1，即$P(\Omega)=1$；不可能事概率为0，即$P(\varnothing)=0$．

（3）概率的加法公式：若事件A与事件B互斥，则$P(A\bigcup B)=P(A)+P(B)$．

推广：一般地，若事件A_1，A_2，…，A_n彼此互斥，则事件发生（即A_1，A_2，…，A_n中有一个发生）的概率等于这n个事件分别发生的概率之和，即：$P(A_1+A_2+...+A_n)=P(A_1)+P(A_2)+...+P(A_n)$．

（4）对立事件的概率：若事件A与事件B互为对立事件，则$P(A)=1-P(B)$，$P(B)=1-P(A)$，且$P(A\bigcup B)=P(A)+P(B)=1$．

（5）概率的单调性：若$A\subseteq B$，则$P(A)\le P(B)$．

（6）若A，B是一次随机实验中的两个事件，则$P(A\bigcup B)=P(A)+P(B)-P(A\bigcap B)$．

5、古典概型

（1）古典概型的定义：一般地，若试验E具有以下特征：

①有限性：样本空间的样本点只有有限个；

②等可能性：每个样本点发生的可能性相等．

称试验E为古典概型试验，其数学模型称为古典概率模型，简称古典概型．

（2）古典概型的概率公式：一般地，设试验E是古典概型，样本空间Ω包含n个样本点，事件A包含其中

的 k 个样本点，则定义事件 A 的概率 $P\left(A\right)=\dfrac{k}{n}=\dfrac{n\left(A\right)}{n\left(\Omega\right)}$.

知识点 2　相互独立事件与条件概率、全概率

1、相互独立事件

（1）相互独立事件的概念

对于两个事件 A，B，如果 $P(B|A)=P(B)$，则意味着事件 A 的发生不影响事件 B 发生的概率．设 $P(A)>0$，根据条件概率的计算公式，$P(B)=P(B|A)=\dfrac{P(AB)}{P(A)}$，从而 $P(AB)=P(A)P(B)$.

由此可得：设 A，B 为两个事件，若 $P(AB)=P(A)P(B)$，则称事件 A 与事件 B 相互独立．

（2）概率的乘法公式：由条件概率的定义，对于任意两个事件 A 与 B，若 $P(A)>0$，则 $P(AB)=P(A)P(B|A)$．我们称上式为概率的乘法公式．

（3）相互独立事件的性质：如果事件 A，B 互相独立，那么 A 与 $\overline{B}$，$\overline{A}$ 与 B，$\overline{A}$ 与 $\overline{B}$ 也都相互独立．

（4）两个事件的相互独立性的推广：两个事件的相互独立性可以推广到 $n(n>2,n\in\mathbf{N}^*)$ 个事件的相互独立性，即若事件 A_1，A_2，…，A_n 相互独立，则这 n 个事件同时发生的概率 $P(A_1A_2\cdots A_n)=P(A_1)(A_2)\cdots P(A_n)$.

2、条件概率

（1）条件概率的定义：一般地，设 A，B 为两个事件，且 $P(A)>0$，称 $P(B|A)=\dfrac{P(AB)}{P(A)}$ 为在事件 A 发生的条件下，事件 B 发生的条件概率．

（2）条件概率的性质

①条件概率具有概率的性质，任何事件的条件概率都在 0 和 1 之间，即 $0\le P(B|A)\le 1$.

②必然事件的条件概率为 1，不可能事件的条件概率为 0.

③如果 B 与 C 互斥，则 $P(B\cup C|A)=P(B|A)+P(C|A)$.

3、全概率公式

（1）全概率公式：$P(B)=P(A)P(B|A)+P(\overline{A})P(B|\overline{A})$；

（2）若样本空间 Ω 中的事件 A_1，A_2，…，A_n 满足：

①任意两个事件均互斥，即 $A_iA_j=\varnothing$，$i,j=1,2,\cdots,n$，$i\ne j$；

② $A_1+A_2+\cdots+A_n=\Omega$；

③ $P\left(A_i\right)>0$，$i=1,2,\cdots,n$.

则对 Ω 中的任意事件 B，都有 $B=BA_1+BA_2+\cdots+BA_n$，且

$$P(B)=\sum_{i=1}^{n}P(BA_i)=\sum_{i=1}^{n}P(A_i)P(B|A_i).$$

4、贝叶斯公式

（1）一般地，当 $0<P(A)<1$ 且 $P(B)>0$ 时，有 $P(A|B)=\dfrac{P(A)P(B|A)}{P(B)}=\dfrac{P(A)P(B|A)}{P(A)P(B|A)+P(\overline{A})P(B|\overline{A})}$

（2）定理 2 若样本空间 Ω 中的事件 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 满足：

①任意两个事件均互斥，即 $A_iA_j=\varnothing$，$i, j=1,2,\cdots,n$，$i\neq j$；

② $A_1+A_2+\cdots+A_n=\Omega$；

③ $0<P(A_i)<1$，$i=1,2,\cdots,n$．

则对 Ω 中的任意概率非零的事件 B，都有 $B=BA_1+BA_2+\cdots+BA_n$，

且 $P(A_j|B)=\dfrac{P(A_j)P(B|A_j)}{P(B)}=\dfrac{P(A_j)P(B|A_j)}{\sum_{i=1}^{n}P(A_i)P(B|A_i)}$

知识点 3　随机变量的分布列、均值与方差

1、随机变量的有关概念

（1）随机变量：随着试验结果变化而变化的变量，常用字母 X，Y，ξ，η，…表示．

（2）离散型随机变量：所有取值可以一一列出的随机变量．

2、离散型随机变量分布列

（1）离散型随机变量分布列的表示：一般地，若离散型随机变量 X 可能取的不同值为 $x_1, x_2, \cdots, x_i, \cdots, x_n$，$X$ 取每一个值 $x_i\ (i=1,2,\cdots,n)$ 的概率 $P(X=x_i)=p_i$，以表格的形式表示如下：

X	x_1	x_2	$\cdots$	x_i	$\cdots$	x_n
P	p_1	p_2	$\cdots$	p_i	$\cdots$	p_n

我们将上表称为离散型随机变量 X 的概率分布列，简称为 X 的分布列．有时为了简单起见，也用等式 $P(X=x_i)=p_i$，$i=1,2,\cdots,n$ 表示 X 的分布列．

（2）分布列的性质：（1） $p_i\geq 0$，$i=1,2,\cdots,n$；（2） $p_1+p_2+\cdots+p_n=1$．

3、离散型随机变量的均值与方差

（1）均值：$E(X)=x_1p_1+x_2p_2+\cdots+x_ip_i+\cdots+x_np_n$ 为随机变量 X 的均值或数学期望，它反映了离散型随机变量取值的平均水平．

（2）均值的性质

① $E(C)=C$（C 为常数）．

②若 $Y=aX+b$，其中 a，b 为常数，则 Y 也是随机变量，且 $E(aX+b)=aE(X)+b$．

③ $E(X_1+X_2)=E(X_1)+E(X_2)$．

④如果 X_1，X_2 相互独立，则 $E(X_1\cdot X_2)=E(X_1)\cdot E(X_2)$．

（3）方差：$D(X)=\sum_{i=1}^{n}(x_i-E(X))^2p_i$ 为随机变量 X 的方差，它刻画了随机变量 X 与其均值 $E(X)$的平均偏离程度，称其算术平方根 $\sqrt{D(X)}$ 为随机变量 X 的标准差.

（4）方差的性质

①若 $Y=aX+b$，其中 a,b 为常数，则 Y 也是随机变量，且 $D(aX+b)=a^2D(X)$．

②方差公式的变形：$D(X)=E(X^2)-[E(X)]^2$．

知识点 4　两点分布、二项分布、超几何分布与正态分布

1、两点分布：若随机变量 X 的分布列具有下表的形式，则称 X 服从两点分布，并称 $p=P(X=1)$为成功概率.

X	0	1
P	$1-p$	p

2、二项分布

（1）n 次独立重复试验：一般地，在相同条件下重复做的 n 次试验称为 n 次独立重复试验.

【注意】独立重复试验的条件：①每次试验在同样条件下进行；②各次试验是相互独立的；③每次试验都只有两种结果，即事件要么发生，要么不发生.

（2）二项分布的表示：一般地，在 n 次独立重复试验中，用 X 表示事件 A 发生的次数，设每次试验中事件 A 发生的概率为 p，不发生的概率 $q=1-p$，那么事件 A 恰好发生 k 次的概率是 $P(X=k)=\mathrm{C}_n^k p^k q^{n-k}$（$k=0$，1，2，…，$n$），于是得到 X 的分布列

X	0	1	…	k	…	n
p	$\mathrm{C}_n^0 p^0q^n$	$\mathrm{C}_n^1 p^1q^{n-1}$	…	$\mathrm{C}_n^k p^kq^{n-k}$	…	$\mathrm{C}_n^n p^nq^0$

由于表中第二行恰好是二项式展开式 $(q+p)^n=\mathrm{C}_n^0p^0q^n+\mathrm{C}_n^1p^1q^{n-1}+\cdots+\mathrm{C}_n^kp^kq^{n-k}+\cdots+\mathrm{C}_n^np^nq^0$ 各对应项的值，称这样的离散型随机变量 X 服从参数为 n，p 的二项分布，记作 $X\sim B(n，p)$，并称 p 为成功概率.

（3）二项分布的期望、方差：若 $X\sim B(n, p)$，则 $E(X)=np$，$D(X)=np(1-p)$．

3、超几何分布：在含有 M 件次品的 N 件产品中，任取 n 件，其中恰有 X 件次品，则事件 $\{X=k\}$ 发生的概率为 $P(X=k)=\dfrac{C_M^kC_{N-M}^{n-k}}{C_N^n}$，$k=0$，1，2，…，$m$，其中 $m=\min\{M，n\}$，且 $n\le N$，$M\le N$，n，M，$N\in N^*$，称分布列为超几何分布列．如果随机变量 X 的分布列为超几何分布列，则称随机变量 X 服从超几何分布．

X	0	1	…	m

P	$\frac{C_M^0 C_{N-M}^{n-0}}{C_N^n}$	$\frac{C_M^1 C_{N-M}^{n-1}}{C_N^n}$	$\cdots$	$\frac{C_M^m C_{N-M}^{n-m}}{C_N^n}$

4、正态曲线与正态分布

（1）正态曲线：我们把函数 $\varphi_{\mu,\sigma}(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\mathrm{e}^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$ ，$x\in(-\infty，+\infty)$（其中 μ 是样本均值，σ 是样本标准差）的图象称为正态分布密度曲线，简称正态曲线．正态曲线呈钟形，即中间高，两边低．

（2）正态曲线的性质

①曲线位于 x 轴上方，与 x 轴不相交；

②曲线是单峰的，它关于直线 $x=\mu$ 对称；

③曲线在 $x=\mu$ 处达到峰值（最大值）$\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}$；

④曲线与 x 轴之间的面积为 1；

⑤当 σ 一定时，曲线的位置由 μ 确定，曲线随着 μ 的变化而沿 x 轴平移；

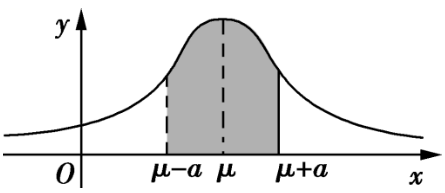
⑥当 μ 一定时，曲线的形状由 σ 确定．σ 越小，曲线越“高瘦”，表示总体的分布越集中；σ 越大，曲线越“矮胖”，表示总体的分布越分散，

（3）正态分布：一般地，如果对于任何实数 a ，$b(a<b)$，随机变量 X 满足 $P(a<X\le b)=\int_a^b\varphi_{\mu,\sigma}(x)\mathrm{d}x$ ，则称随机变量 X 服从正态分布．正态分布完全由参数 μ ，σ 确定，因此正态分布常记作 $N(\mu,\sigma^2)$ ．如果随机变量 X 服从正态分布，则记为 $X\sim N(\mu,\sigma^2)$.

其中，参数 μ 是反映随机变量取值的平均水平的特征数，可以用样本的均值去估计；σ 是衡量随机变量总体波动大小的特征数，可以用样本的标准差去估计．

（4）3σ 原则

若 $X\sim N(\mu,\sigma^2)$，则对于任意的实数 $a>0$ ，$P(\mu-a<X\le\mu+a)=\int_{\mu-a}^{\mu+a}\varphi_{\mu,\sigma}(x)\mathrm{d}x$ 为下图中阴影部分的面积，对于固定的 μ 和 a 而言，该面积随着 σ 的减小而变大．这说明 σ 越小，X 落在区间 $(\mu-a,\mu+a]$ 的概率越大，即 X 集中在 μ 周围的概率越大



特别地，有 $P(\mu-\sigma<X\le\mu+\sigma)=0.6826$ ；$P(\mu-2\sigma<X\le\mu+2\sigma)=0.9544$ ；$P(\mu-3\sigma<X\le\mu+3\sigma)$ $=0.9974$.

由 $P(\mu-3\sigma<X\le\mu+3\sigma)=0.9974$ ，知正态总体几乎总取值于区间 $(\mu-3\sigma，\mu+3\sigma)$ 之内．而在此区间以外取值的概率只有 0.0026 ，通常认为这种情况在一次试验中几乎不可能发生，即为小概率事件．在实际

应用中，通常认为服从于正态分布 $N(\mu,\sigma^2)$ 的随机变量 X 只取 $(\mu-3\sigma，\mu+3\sigma)$ 之间的值，并简称之为 3σ 原则．

重点突破·高分必抢

重难点 01　二项分布中的最值问题

记 $p_k=P(x=k)$，则当 $k<(n+1)p$ 时，$p_k>p_{k-1}$，pk 递增；当 $k<(n+1)p$ 时，$p_k<p_{k-1}$，p_k 递减.

故 p_k 最大值在 $k=(n+1)p$ 时取得（此时 $p_k=p_{k-1}$，两项均为最大值；

若 $(n+1)p$ 非整数，则 k 取 $(n+1)p$ 的整数部分时，p_k 最大且唯一）.

【典例 1】（24-25 高三上·河北沧州·月考）某市为了传承中华优秀传统文化，组织该市中学生进行了一次文化知识答题竞赛.已知某同学答对每道题的概率均为 $\frac{2}{3}$，且每次答题相互独立，若该同学连续作答 20 道试题后结束比赛，记该同学答对 m 道试题的概率为 $f\left(m\right)$，则当 $m=$__________时，$f\left(m\right)$ 取得最大值.

【典例 2】（24-25 高三上·江西新余·月考）已知 4 个独立的报警器都只有“发出警报”和“不发出警报”两种状态，某种险情发生时每个报警器都有 $\frac{2}{3}$ 的概率发出警报，设某次险情发生时发出警报的警报器数量为 X .

(1)求 X 的分布列与数学期望；

(2)求 $k\left(k\in\mathrm{N}^*\right)$ 的值使某次险情发生时有最大的概率有 k 个报警器发出警报.

重难点 02　概率在决策中的应用

利用随机变量的数学期望与方差可以帮助我们做出科学的决策，其中随机变量 X 的数学期望的意义在于描述随机变量的平均程度，而方差则描述了随机变量稳定与波动或集中与分散的状况．品种的优劣、预报的准确与否、机器的性能好坏等很多指标都与这两个特征量有关.

【典例 1】（2024·广东广州·模拟预测）小张参加某项专业能力考试.该考试有 A，B，C 三类问题，考生可以自行决定三类问题的答题次序，回答问题时按答题次序从某一类问题中随机抽取一个问题回答，若回答正确则考试通过，若回答错误则继续从下一类问题中再随机抽取一个问题回答，依此规则，直到三类问题全部答完，仍没有答对，则考试不通过.已知小张能正确回答 A，B，C 三类问题的概率分别为 p_1，p_2，p_3，且每个问题的回答结果相互独立.

(1)若小张按照 A 在先，B 次之，C 最后的顺序回答问题，记 X 为小张的累计答题数目，求 X 的分布列；

(2)小张考试通过的概率会不会受答题次序的影响，请作出判断并说明理由；

(3)设 $0<p_3<p_2<p_1<1$，为使累计答题数目的均值最小，小张应如何安排答题次序？并说明理由.

【典例 2】（23-24 高三下·安徽·一模）高三联考数学试卷的多项选择题每小题满分 6 分，每小题有 4 个选项，其中只有 2 个或者 3 个选项是正确的.若正确选项有 2 个，则选对其中 1 个得 3 分；若正确选项有 3 个，则选对其中 1 个得 2 分，选对其中 2 个得 4 分，答案中有错误选项的得 0 分.设一套数学试卷的多项选择题中有 2 个选项正确的概率为 $p\left(0<p<1\right)$，有 3 个选项正确的概率为 $1-p$.在一次模拟考试中：

(1)小明可以确认一道多项选择题的选项 A 是错误的，从其余的三个选项中随机选择 2 个作为答案，若小明该题得分 X 的数学期望为 3，求 p；

(2)小明可以确认另一道多项选择题的选项 A 是正确的，其余的选项只能随机选择.小明有三种方案：①只选 A 不再选择其他答案；②从另外三个选项中再随机选择 1 个.共选 2 个；③从另外三个选项中再随机选择 2 个，共选 3 个.若 $p=\frac{1}{3}$，以最后得分的数学期望为决策依据，小明应该选择哪个方案？

重难点 03　概率统计与函数、导数的综合问题

（1）根据题目所求或题干给出的条件确定自变量及其取值范围；

（2）根据题意构建函数模型，写出函数的解析式；

（3）对构造的函数进行求导或利用函数单调性，求解目标函数的最值或最优解.

【典例 1】（23-24 高三下·湖北襄阳·模拟预测）甲和乙两个箱子中各装有 N 个大小、质地均相同的小球，并且各箱中 $\frac{3}{5}$ 是红球，$\frac{2}{5}$ 是白球.

(1)当 $N=5$ 时，从甲箱中随机抽出 2 个球，求 2 个球的颜色不同的概率.

(2)由概率学知识可知，当总量 N 足够多而抽出的个体足够少时，超几何分布近似为二项分布，现从甲箱中不放回地取 3 个小球，恰有 2 个白球的概率记作 P_1；从乙箱中有放回地取 3 个小球，恰有 2 个白球的概率记作 P_2.

①求 P_1，P_2.

②当 N 至少为多少时，我们可以在误差不超过 0.001（即 $P_1-P_2\le 0.001$）的前提下认为超几何分布近似为二项分布？（参考数据：$\sqrt{578}\approx 24.04$）.

【典例 2】（23-24 高三下·辽宁沈阳·模拟预测）某校举行篮球比赛，规则如下：甲、乙每人投 3 球，进球多的一方获得胜利，胜利 1 次，则获得一个积分，平局或者输方不得分.已知甲和乙每次进球的概率分别是$\frac{1}{2}$和 p，且每人进球与否互不影响.

(1)若 $p=\frac{3}{4}$，求乙在一轮比赛中获得一个积分的概率；

(2)若 $\frac{1}{3}\le p\le\frac{3}{4}$，且每轮比赛互不影响，乙要想至少获得 3 个积分且每轮比赛至少要超甲 2 个球，从数学期望的角度分析，理论上至少要进行多少轮比赛？

重难点 04　概率统计与数列的综合问题

1、概率统计与数列的综合问题涉及的三个方面

（1）以数列为背景考查概率问题．此类问题表面看来是数列问题，但实际上常考查互斥事件和相互独立事件的概率，解决这类问题，首先要清楚基本的概率模型的定义，再选择恰当的概率公式解决问题.

（2）以期望为背景考查数列求和．此类问题求解的关键是确定变量的所有可能取值及对应的概率，深入考查了数列求和的方法.

（3）以概率为背景考查数列通项公式．此类问题的求解关键是通过对概率关系的研究，构造数列.

2、题型识别

此类问题的特征是第 n 次操作的情况会影响第 n+1 次操作的情况,解题步骤如下:

（1）设出第 n 次操作后需要求解的概率 P;

（2）根据题目中的条件得到数列$\{P_n\}$所满足的递推关系式;

（3）通过数列递推关系式求通项或数列的和解决问题.

【典例 1】（23-24 高三下·山东菏泽·模拟预测）菏泽牡丹栽培始于隋，兴于唐，盛于明清，自古享有“曹州牡丹甲天下”的美誉.四月，菏泽大地上牡丹次第绽放，观赏牡丹拥有 9 大色系、10 大花型、1280 余个品种，以最亮眼的姿态恭迎八方游人.某旅行团带游客来菏泽观赏牡丹，游客可自由选择曹州牡丹园和中国牡丹园

的一处游览，若每位游客选择曹州牡丹园的概率是$\frac{3}{4}$，选择中国牡丹园的概率是$\frac{1}{4}$，游客之间选择意愿相互独立.

(1)从游客中随机选取3人，记3人中选择曹州牡丹区的人数为X，求X的分布列、均值与方差；

(2)现对游客进行问卷调查，若选择曹州牡丹园记2分，选择中国牡丹园记1分，记已调查过的累计得分为n分的概率为P_n，求P_n.

【典例2】(23-24高三下·福建·模拟预测)为庆祝祖国75周年华诞，某商场决定在国庆期间举行抽奖活动.盒中装有5个除颜色外均相同的小球，其中2个是红球，3个是黄球.每位顾客均有一次抽奖机会，抽奖时从盒中随机取出1球，若取出的是红球，则可领取“特等奖”，该小球不再放回；若取出的是黄球，则可领取“参与奖”，并将该球放回盒中.

(1)在第2位顾客中“参与奖”的条件下，第1位顾客中“特等奖”的概率；

(2)记P_{n-1}为第n个顾客参与后后来参与的顾客不再有机会中“特等奖”的概率，求数列$\{P_n\}$的通项公式；

(3)设事件X为第k个顾客参与时获得最后一个“特等奖”，要使X发生概率最大，求k的值.

方法技巧·逆袭学霸

一、随机事件的频率与概率

1、频率是概率的近似值，概率是频率的稳定值．通常用概率来反映随机事件发生的可能性的大小，有时也用频率来作为随机事件概率的估计值.

2、随机事件概率的求法：利用概率的统计定义求事件的概率，即通过大量的重复试验，事件发生的频率会逐渐趋近于某一个常数，这个常数就是概率.

【典例1】(24-25高三上·重庆·开学考试)某池塘中饲养了A、B两种不同品种的观赏鱼，假设鱼群在池塘里是均匀分布的.在池塘的东、南、西三个采样点捕捞得到如下数据(单位：尾)，若在采样点北捕捞到20尾鱼，

则品种 A 约有（   ）

采样点	品种 A	品种 B
东	20	9
南	7	3
西	17	8

A．6 尾　　B．10 尾　　C．13 尾　　D．17 尾

【典例 2】（24-25 高三上·江西·开学考试）（多选）某冷饮店为了保证顾客能买到当天制作的酸皮奶，同时尽量减少滞销，统计了 30 天的销售情况，得到如下数据：

日销售量/杯	$[25,35)$	$[35,45)$	$[45,55)$	$[55,65)$	$[65,75]$
天数	4	6	9	5	6

以样本估计总体，用频率代替概率，则下列结论正确的是（   ）

A．估计平均每天销售 50 杯酸皮奶（同一组区间以中点值为代表）

B．若当天准备 55 杯酸皮奶，则售罄的概率为$\dfrac{11}{30}$

C．若当天准备 45 杯酸皮奶，则卖不完的概率$\dfrac{1}{3}$

D．这 30 天酸皮奶日销售量的 80%分位数是 65 杯

二、判断互斥、对立事件的两种方法

（1）定义法：判断互斥事件、对立事件一般用定义判断，不可能同时发生的两个事件为互斥事件；两个事件，若有且仅有一个发生，则这两事件为对立事件，对立事件一定是互斥事件．

（2）集合法：①由各个事件所含的结果组成的集合彼此的交集为空集，则事件互斥．

②事件 A 的对立事件所含的结果组成的集合，是全集中由事件 A 所含的结果组成的集合的补集．

【典例 1】（24-25 高三上·河北秦皇岛·一模）若干人站成一排，其中为互斥事件的是（   ）

A．“甲站排头”与“乙站排头”　　B．“甲站排头”与“乙站排尾”

C．“甲站排头”与“乙不站排头”　　D．“甲不站排头”与“乙不站排头”

【典例 2】（24-25 高三上·陕西安康·开学考试）（多选）一个不透明的盒子中装有大小和质地都相同的编号分别为 1，2，3，4 的 4 个小球，从中任意摸出两个球．设事件 A_1 =“摸出的两个球的编号之和小于 5”，事件 A_2 =“摸出的两个球的编号都大于 2”，事件 A_3 =“摸出的两个球中有编号为 3 的球”，则（   ）

A．事件 A_1 与事件 A_2 是互斥事件　　B．事件 A_1 与事件 A_3 是对立事件

C．事件 A_1 与事件 A_3 是相互独立事件　　D．事件 $A_2 \cap A_3$ 与事件 $A_1 \cap A_3$ 是互斥事件

三、复杂事件的概率的两种求法

（1）直接求法，将所求事件分解为一些彼此互斥的事件，运用互斥事件的概率求和公式计算.

（2）间接求法，先求此事件的对立事件的概率，再用公式 $P(A)=1-P(\overline{A})$求解(正难则反)，特别是“至多”“至少”型题目，用间接求法就比较简便.

【典例 1】（23-24 高三下·辽宁·模拟预测）某疾病全球发病率为0.03%，该疾病检测的漏诊率（患病者判定为阴性的概率）为5%，检测的误诊率（未患病者判定为阳性的概率）为1%，则某人检测成阳性的概率约为（　）

A．0.03%　　B．0.99%　　C．1.01%　　D．1.03%

【典例 2】（23-24 高三下·安徽合肥·模拟预测）某高校强基计划入围有 3 道面试题目，若每位面试者共有三次机会，一旦某次答对抽到的题目，则面试通过，否则就一直抽题到第 3 次为止．李想同学答对每道题目的概率都是 0.6，假设对抽到的不同题目能否答对是独立的.

(1)求李想第二次答题通过面试的概率;

(2)求李想最终通过面试的概率.

四、古典概型的概率

用公式法求古典概型的概率就是用所求事件 A 所含的基本事件个数除以基本事件空间 Ω 所含的基本事件个数求解事件 A 发生的概率 $P(A)$．解题的关键如下：

①定型，即根据古典概型的特点——有限性与等可能性，确定所求概率模型为古典概型.

②求量，利用列举法、排列组合等方法求出基本事件空间 Ω 及事件 A 所含的基本事件数.

③求值，代入公式 $P(A)=\dfrac{A\text{包含的基本事件的个数}}{\text{基本事件的总数}}$求值.

【典例 1】（23-24 高三上·四川内江·月考）从甲、乙等6名志愿者中随机选4名参加社区服务工作，则甲、乙都入选的概率为（　）

A．$\dfrac{2}{5}$　　B．$\dfrac{1}{4}$　　C．$\dfrac{1}{3}$　　D．$\dfrac{2}{15}$

【典例 2】（23-24 高三下·湖南·模拟预测）九九重阳节期间，甲、乙两名同学计划去敬老院做志愿者，若甲同学在初八、初九、初十这三天中随机选一天，乙同学在初八、初九这两天中随机选一天，且两名同学的选择互不影响，则他们在同一天去的概率为（　）

A. $\frac{1}{6}$　　B. $\frac{1}{3}$　　C. $\frac{1}{2}$　　D. $\frac{2}{3}$

五、求相互独立事件同时发生的概率的方法

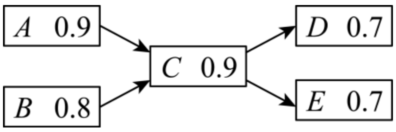
(1)首先判断几个事件的发生是否相互独立.

(2)求相互独立事件同时发生的概率的方法主要有:

①利用相互独立事件的概率乘法公式直接求解.

②正面计算较繁或难以入手时，可从其对立事件入手计算.

【典例 1】(23-24 高三上·山西大同·月考）已知某音响设备由五个部件组成，A 电视机，B 影碟机，C 线路，D 左声道和 E 右声道，其中每个部件能否正常工作相互独立，各部件正常工作的概率如图所示.能听到声音，当且仅当 A 与 B 至少有一个正常工作，C 正常工作，D 与 E 中至少有一个正常工作.则听不到声音的概率为（　）



A. 0.19738　　B. 0.00018　　C. 0.01092　　D. 0.09828

【典例 2】(24-25 高三上·广东·开学考试）在电子游戏中，若甲，乙，丙通关的概率分别是 $\frac{2}{3},\frac{4}{5},\frac{3}{4}$，且三人通关与否相互独立，则在甲，乙，丙中恰有两人通关的条件下，甲通关的概率为（　）

A. $\frac{2}{5}$　　B. $\frac{1}{3}$　　C. $\frac{6}{13}$　　D. $\frac{7}{13}$

六、求条件概率的两种方法

（1）利用定义，分别求 $P(A)$和 $P(AB)$，得 $P(B)=P(B|A)=\frac{P(AB)}{P(A)}$，这是求条件概率的通法.

（2）借助古典概型概率公式，先求事件 A 包含的基本事件数 $n(A)$，再求事件 A 与事件 B 的交事件中包含的基本事件数 $n(AB)$，得 $P(B|A)=\frac{n(AB)}{n(A)}$.

【典例 1】(24-25 高三上·甘肃白银·月考）质监部门对某种建筑构件的抗压能力进行检测，对此建筑构件实施打击，该构件有 A,B 两个易损部位，每次打击后，A 部位损坏的概率为 $\frac{3}{10}$，B 部位损坏的概率为 $\frac{1}{2}$，则在第一次打击后就有部位损坏（只考虑 A、B 两个易损部分）的条件下，A,B 两个部位都损坏的概率是（　）

A. $\frac{3}{13}$　　B. $\frac{5}{13}$　　C. $\frac{17}{20}$　　D. $\frac{3}{20}$

【典例 2】(24-25 高三上·辽宁·开学考试）某公司的两名同事计划今年国庆节期间从大理、丽江、洱海、玉

龙雪山、蓝月谷这5个著名旅游景点中随机选择一个游玩.若在两人中至少有一人选择大理的条件下，求两人选择的景点不同的概率为（　）

A. $\frac{5}{8}$　　B. $\frac{8}{9}$　　C. $\frac{7}{8}$　　D. $\frac{6}{7}$

七、全概率公式与贝叶斯公式的使用

1、全概率公式 $P(B)=\sum_{i=1}^{n}P(A_i)P(B|A_i)$ 在解题中体现了“化整为零、各个击破”的转化思想，可将较为复杂的概率计算分解为一些较为容易的情况分别进行考虑.

2、利用贝叶斯公式求概率的步骤

第一步：利用全概率公式计算 $P(A)$，即 $P(A)=\sum_{i=1}^{n}P(B_i)P(A|B_i)$；

第二步：计算 $P(AB)$，可利用 $P(AB)=P(B)P(A|B)$ 求解；

第三步：代入 $P(B|A)=\dfrac{P(AB)}{P(A)}$ 求解.

3、贝叶斯概率公式反映了条件概率 $P(B|A)=\dfrac{P(AB)}{P(A)}$，全概率公式 $P(A)=\sum_{i=1}^{n}P(B_i)P(A|B_i)$ 及乘法公式 $P(AB)=P(B)P(A|B)$ 之间的关系，即 $P(B_j|A)=\dfrac{P(B_jA)}{P(A)}=\dfrac{P(B_j)P(A|B_j)}{P(A)}=\dfrac{P(B_j)P(A|B_j)}{\sum_{i=1}^{n}P(B_i)P(A|B_i)}$.

【典例 1】（24-25 高三上·河北沧州·月考）中国是瓷器的故乡，瓷器的发明是中华民族对世界文明的伟大贡献，瓷器传承着中国文化，有很高的欣赏和收藏价值．现有一批同规格的瓷器，由甲、乙、丙三家瓷厂生产，其中甲、乙、丙瓷厂分别生产 300 件、300 件、400 件，而且甲、乙、丙瓷厂的次品率依次为 4%、3%、3%．现从这批瓷器中任取一件，若取到的是次品，则其来自甲厂的概率为______．（结果保留两位小数）

【典例 2】（24-25 高三上·福建莆田·月考）第三次人工智能浪潮滚滚而来，以 ChatGPT 发布为里程碑，开辟了人机自然交流的新纪元.ChatGPT 所用到的数学知识并非都是遥不可及的高深理论，概率就被广泛应用于 ChatGPT 中.某学习小组设计了如下问题进行探究：甲和乙两个箱子中各装有 5 个大小相同的小球，其中甲箱中有 3 个红球、2 个白球，乙箱中有 4 个红球、1 个白球.

(1)从甲箱中随机抽出 2 个球，在已知抽到红球的条件下，求 2 个球都是红球的概率；

(2)抛一枚质地均匀的骰子，如果点数小于等于 4，从甲箱子随机抽出 1 个球；如果点数大于等于 5，从乙箱子中随机抽出 1 个球.求抽到的球是红球的概率；

(3)在（2）的条件下，若抽到的是红球，求它是来自乙箱的概率.

八、求离散型随机变量X的均值与方差的步骤

（1）理解 X 的意义，写出 X 可能取的全部值.

（2）求 X 取每个值时的概率.

（3）写出 X 的分布列.

（4）由均值的定义求 $E(X)$.

（5）由方差的定义求 $D(X)$.

【典例 1】（24-25 高三上·贵州·月考）已知甲、乙两人参加某档知识竞赛节目，规则如下：甲、乙两人以抢答的方式答题，抢到并回答正确得 1 分，答错则对方得 1 分，甲、乙两人初始分均为 0 分，答题过程中当一人比另一人的得分多 2 分时，答题结束，且分高者获胜，若甲、乙两人总共答完 5 题时仍未分出胜负，则答题直接结束，且分高者获胜.已知甲、乙两人每次抢到题的概率都为 $\frac{1}{2}$，甲、乙两人答对每道题的概率分别为 $\frac{3}{4},\frac{5}{12}$，每道题两人答对与否相互独立，且每题都有人抢答.

(1)求第一题结束时甲获得 1 分的概率；

(2)记 X 表示知识竞赛结束时，甲、乙两人总共答题的数量，求 X 的分布列与期望.

【典例 2】（24-25 高三上·福建福州·月考）已知篮球比赛中，得分规则如下：3 分线外侧投入可得 3 分，踩线及 3 分线内侧投入可得 2 分，不进得 0 分；经过多次试验，某生投篮 100 次，有 20 个是 3 分线外侧投入，20 个是踩线及 3 分线内侧投入，其余不能入篮，且每次投篮为相互独立事件.

(1)求该生在 4 次投篮中恰有三次是 3 分线外侧投入的概率；

(2)求该生两次投篮得分 ξ 的分布列及数学期望.

九、独立重复试验与二项分布

1、定型："独立""重复"是二项分布的基本特征，"每次试验事件发生的概率都相等"是二项分布的本质特征．判断随机变量是否服从二项分布，要看在一次试验中是否只有两种试验结果，且两种试验结果发生的概率分别为 $p,1-p$，还要看是否为 n 次独立重复试验，随机变量是否为某事件在这 n 次独立重复试验中发生的次数．

2、定参，确定二项分布中的两个参数 n 和 p，即试验发生的次数和试验中事件发生的概率．

3、列表，根据离散型随机变量的取值及其对应的概率，列出分布列．

4、求值，根据离散型随机变量的期望和方差公式，代入相应数据求值．

相关公式：已知 $X\sim B(n，p)$，则 $P(X=k)=C_n^kp^k(1-p)^{n-k}(k=0,1,2，…，n)$，$E(X)=np$，$D(X)=np(1-p)$．

【典例 1】（24-25 高三上·甘肃白银·月考）激光的单光子通信过程可用如下模型表述：发送方将信息加密后选择某种特定偏振状态的单光子进行发送，在信息传输过程中，若存在窃听者，由于密码本的缺失，窃听者不一定能正确解密并获取准确信息.某次实验中，假设原始信息的单光子的偏振状态0，1，2 等可能地出现，原始信息的单光子的偏振状态与窃听者的解密信息的单光子的偏振状态有如下对应关系.

原始信息的单光子的偏振状态	0	1	2
解密信息的单光子的偏振状态	0，1，2	0，1，3	1，2，3

已知原始信息的任意一种单光子的偏振状态，对应的窃听者解密信息的单光子的偏振状态等可能地出现.

(1)已知发送者连续两次发送信息，窃听者解密信息的单光子的偏振状态均为 1.求原始信息的单光子有两种偏振状态的概率.

(2)若发送者连续三次发送的原始信息的单光子的偏振状态均为 1，设窃听者解密信息的单光子的偏振状态为 1 的个数为 X，求 X 的分布列和数学期望 $E(X)$.

【典例 2】（22-23 高二下·北京延庆·期中）已知某计算机网络的服务器有三台设备，只要有一台能正常工作，计算机网络就不会断掉．如果三台设备各自能正常工作的概率都为 0.8，它们之间互相不影响．设能正常工作的设备数为 X．

(1)求 X 的分布列；

(2)求 $E(X)$和 $D(X)$；

(3)求计算机网络不会断掉的概率．

十、求超几何分布的分布列的步骤

第一步：验证随机变量服从超几何分布，并确定参数 N,M,n 的值；

第二步：根据超几何分布的概率计算公式计算出随机变量取每一个值时的概率；

第三步：用表格的形式列出分布列。

【典例 1】（23-24 高三下·河南信阳·模拟预测）袋中有 8 个除颜色外完全相同的小球，其中 1 个黑球，3 个白球，4 个红球.

(1)若从袋中一次性取出两个小球，即取到的红球个数为 X ，求 X 的分布列和数学期望；

(2)若从袋中不放回的取 3 次，每次取一个小球，取到黑球记 0 分，取到白球记 2 分，取到红球记 4 分，在最终得分为 8 分的条件下，恰取到一个红球的概率.

【典例 2】（24-25 高三上·广东·月考）已知某批矿物晶体中含有大量水分子，且经过测量发现其中轻水分子，重水分子，超重水分子的比例为 $6:3:1$.

(1)现利用仪器从一块矿物晶体中分离出 3 个水分子，用频率估计概率，求至少分离出 2 个轻水分子的概率；

(2)从一块矿物晶体中分离出 10 个水分子，其中轻水分子的个数有 6 个，然后再从这 10 个水分子中随机分离出 3 个水分子来进行后续的实验，记这 3 个水分子中轻水分子的个数为 X ，求 X 的数学期望.

十一、关于正态总体在某个区间内取值的概率求法

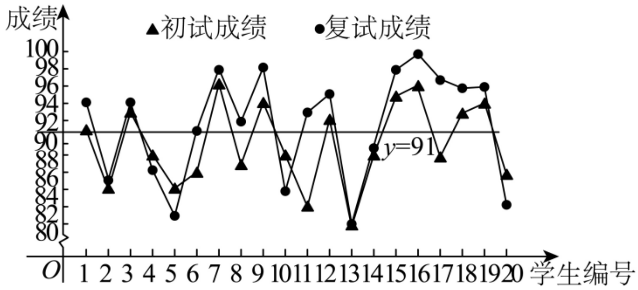
（1）熟记 $P(\mu-\sigma<X\leq\mu+\sigma)$，$P(\mu-2\sigma<X\leq\mu+2\sigma)$，$P(\mu-3\sigma<X\leq\mu+3\sigma)$的值.

（2）充分利用正态曲线的对称性和曲线与 x 轴之间面积为 1.①正态曲线关于直线 $x=\mu$ 对称，从而在关于 $x=\mu$ 对称的区间上概率相等；②$P(X<a)=1-P(X\geq a)$，$P(X<\mu-a)=P(X\geq\mu+a)$.

【典例 1】（23-24 高三下·江西新余·模拟预测）已知连续型随机变量 X 与离散型随机变量 Y 满足 $X\sim N\left(\mu,\mu^2\right)(\mu>0)$，$Y\sim B\left(16,\frac{1}{2}\right)$，若 X 与 Y 的方差相同且 $P(2\le X\le 4)=0.3$，则 $P(X\le 4)=$（　）.

A．0.8　　B．0.5　　C．0.3　　D．0.2

【典例 2】（23-24 高三下·重庆·模拟预测）为了选拔雏鹰计划的预备人员，某地区教育局对高一年级新生进行了测试（测试分为初试和复试）．现共有 400 名学生参加初试，且所有学生的初试成绩 X 近似服从正态分布 $N\left(69,11^2\right)$，根据以往入选同学的初试和复试成绩走势，本届复试作出如下规定：①初试成绩高于 91 分者免于复试，直接确定为雏鹰计划的预备人员；②初试成绩高于 80 分且不超过 91 分的学生有资格参加复试，下图为从以往入围雏鹰计划预备人员的所有同学中随机抽取的 20 名同学的的初试和复试成绩．



(1)试估计这 400 名学生中能参加复试的人数，并说明规定①的合理性；

(2)复试试题由两道数学题和两道物理题构成，已知数学题的难度系数为 0.5（可以理解为进入复试的学生答对每道数学题目的概率是 0.5），物理题目的难度系数均为 P，能否答对这些题目相互独立，每个考生需答完四个题目，至少答出其中三个即通过复试并确定为雏鹰计划的预备人员，如果本次确定为雏鹰计划的预备人员数目不能超过 33 人，请确定物理试题的难度系数 P 的取值范围．

附：若随机变量 X 服从正态分布 $N\left(\mu,\sigma^2\right)$，则 $P(\mu-\sigma\le X\le\mu+\sigma)\approx 0.6827$，

$P(\mu-2\sigma\le X\le\mu+2\sigma)\approx 0.9545, P(\mu-3\sigma\le X\le\mu+3\sigma)\approx 0.9973.$

易混易错

易错点 1　互斥事件与对立事件关系模糊

点拨：　“互斥事件”和“对立事件”都是就两个事件而言的，互斥事件是指事件 A 与事件 B 在一次实验中不

会同时发生，而对立事件是指事件 A 与事件 B 在一次实验中有且只有一个发生，因此，对立事件一定是互斥事件，但互斥事件不一定是对立事件。

【典例 1】(24-25 高三上·上海·开学考试）装有红球、白球和黑球各 2 个的口袋内一次取出 2 个球，有如下的一些事件：①两球都不是白球；②两球恰有一个白球；③两球至少有一个白球，其中与事件“两球都为白球”互斥而非对立的事件是（　）

A. ①　　B. ①②　　C. ②③　　D. ①②③

【典例 2】(23-24 高三上·江苏徐州·月考）从一堆产品（其中正品与次品都多于 2 件）中任取 2 件，观察正品件数和次品件数，则下列每对事件互斥但不对立的是（　）

A. “至少有 1 件次品”与“全是次品”

B. “恰好有 1 件次品”与“恰好有 2 件次品”

C. “至少有 1 件次品”与“全是正品”

D. “至少有 1 件正品”与“至少有 1 件次品”

易错点 2　使用概率加法公式没有注意成立条件

点拨： 概率加法公式是指当事件 A、B 为互斥事件时，则有 $P(A+B)=P(A)+P(B)$，否则只能使用一般的概率加法公式 $P(A+B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)$。解此类题关键是要分清已知事件是由哪些互斥事件组成的，然后代公式 $P(A+B)=P(A)+P(B)$求解，若已知事件不能分解为几个互斥事件的和，则只能代一般的概率加法公式。

【典例 1】(23-24 高三下·云南昆明·三模）（多选）在一个有限样本空间中，事件 A,B,C 发生的概率满足 $P(A)=P(B)=P(C)=\frac{1}{3}$，$P(A\cup B)=\frac{5}{9}$，$A$ 与 C 互斥，则下列说法正确的是（　）

A. $P(A\bar{C})=\frac{1}{3}$　　B. A 与 B 相互独立

C. $P(ABC)=\frac{1}{27}$　　D. $P(A\cup B\cup C)\le\frac{8}{9}$

【典例 2】(23-24 高三下·湖北·二模）（多选）已知 A,B 为随机事件，$P(A)=0.5,P(B)=0.4$，则下列结论正确的有（　）

A. 若 A,B 为互斥事件，则 $P(A+B)=0.9$

B. 若 A,B 为互斥事件，则 $P(\bar{A}+\bar{B})=0.1$

C. 若 A,B 相互独立，则 $P(A+B)=0.7$

D. 若 $P(B|A)=0.3$，则 $P(B|\bar{A})=0.5$

易错点 3　在求离散型随机变量分布列时忽视所有事件概率和为 1

点拨： 解答此类题常见的错误为①事件的概率不会求；②所求的事件概率不满足

$p_1+p_2+p_3+\cdots+p_n=1$。对于②我们通常先求出一些简单事件的概率，如果某事件的概率不好求，在确保其它事件的概率正确的前提下，可用性质

$p_1+p_2+p_3+\cdots+p_n=1$求解。

【典例 1】（23-24 高三上·天津河东·月考）设随机变量 X 的概率分布列为：

X	1	2	3	4
P	$\frac{1}{12}$	m	$\frac{7}{12}$	n

已知 $E(X)=\frac{17}{6}$，则 $2m+n=$______.

【典例 2】（24-25 高三上·江苏南通·月考）（多选）已知随机变量 X，Y，其中 $Y=3X+1$，已知随机变量 X 的分布列如下表

X	1	2	3	4	5
p	m	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{5}$	n	$\frac{3}{10}$

若 $E(X)=3$，则（　）

A. $m=\frac{3}{10}$　　B. $n=\frac{1}{5}$　　C. $E(Y)=10$　　D.